Nombre y Apellidos:
Sección:
Carnet:

MA 2223 ALG 3. PRIMER EXAMEN PARCIAL
Jueves 1 junio 2006

1. (5 ptos). ¿Cierto o falso?

(a) Sea V un espacio con producto interno. Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ satisfacen $\vec{u} \perp \vec{v}$ y $\vec{v} \perp \vec{w}$ entonces $\vec{u} \perp \vec{w}$.
FALSO. En cualquier espacio con producto interno, tomar $\vec{u}, \vec{v}$ vectores ortogonales y $\vec{w} = \vec{u}$. Si se quiere vectores distintos (aunque no se lo pide) tomar $\vec{w} = -\vec{u}$.

(b) Si $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ y existe una matriz ortogonal $Q \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ tal que Q^tAQ es diagonal, entonces A es simétrica.
CIERTO. Si $Q^tAQ = D$ (D diagonal), se tiene $A = QDQ^t$ (usando $Q^t = Q^{-1}$, luego

$$\begin{aligned} A^t &= (QDQ^t)^t = QD^tQ^t \\ &= QDQ^t \text{ (usando } D^t = D \text{ por ser } D \text{ diagonal)} \\ &= A \end{aligned}$$

.

(c) Para todo $a, b \in \mathbf{R}$ y $z \in \mathbf{C}$ la matriz $\begin{pmatrix} a & \bar{z} \\ z & b \end{pmatrix}$ es diagonalizable.
CIERTO. Tal matriz es Hermitiana, y las matrices Hermitianas son diagonalisables.

(d) La transformación lineal $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definida por la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ es una isometría.
FALSO. Una isometría preserva normas; la norma de $(0,1)$ es 1, mientras que su imagen bajo la T.L. dada es $(-1,5)$ cuya norma es $\sqrt{26}$.

(e) Si λ es un autovalor de una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbf{C})$ tal que $\bar{A}^t = -A$, entonces $\bar{\lambda} = -\lambda$.
CIERTO. Sea $\vec{v}$ un autovector de A perteneciente al autovalor λ. Se tiene, con el producto Hermitiano standard,

$$\begin{aligned} \lambda < \vec{v}, \vec{v} > &= < \lambda\vec{v}, \vec{v} > = < A\vec{v}, \vec{v} > \\ &= < \vec{v}, \bar{A}^t\vec{v} = < \vec{v}, -A\vec{v} > \\ &= < \vec{v}, -\lambda\vec{v} > = -\bar{\lambda} < \vec{v}, \vec{v} > \end{aligned}$$

lo que implica $\lambda = -\bar{\lambda}$ ($< \vec{v}, \vec{v} > \neq 0$, puesto que $\vec{v} \neq \vec{0}$ por definición de autovector).

2. (10 ptos). Hallar una matriz ortogonal que diagonalisa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ayuda: $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3)$.

SOLUCION. Los autovalores son 3, con multiplicidad 2, y -3, con multiplicidad 1. El autoespacio perteneciente al autovalor 3 es el espacio de soluciones del sistema lineal homogeneo

$$(A - 3I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Haciendo los cálculos, resulta que $A - 3I$ tiene rango 1, como debería, y el sistema reduce a la ecuación $x - 2y - z = 0$. Una base para el autoespacio es pues $\{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$. (para ahorrar espacio, se escriben los vectores como filas, cuando no hay peligro de confusión). De manera semenjante, $A + 3I$ tiene rango 2, y el autoespacio correspondiente a -3 es el espacio de soluciones de $x + z = 0, x - 2y + 5z = 0$; una base es $\{(1, -2, -1)\}$. Ahora, se quiere una matriz *ortogonal* cuyas columnas son autovectores de A, y una matriz es *ortogonal* si y solo si sus columnas forman un conjunto *ortonormal*. Se busca primero una base ortonormal del 3-autoespacio. Aplicando Gram-Schmidt a la base dada, se concluye que $\{(1, 0, 1), (1, 1, -1)\}$ es una base ortogonal de dicho espacio. Estos vectores son automaticamente ortogonales a vectores del -3-autoespacio. Luego, normalizando, es decir dividiendo cada vector por su norma, para tener vectores de norma 1, se concluye que

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal tal que

$$Q^t A Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

OBSERVACIONES. (a.) Me quedé desagradablemente sorprendido por el número de estudiantes que no sabían calcular autovectores-una destreza fundamental. (b.) $||\vec{v}|| = \sqrt{< \vec{v}, \vec{v} >}$. Mucha gente se olvidó de la raiz cuadrada.

3. (10 ptos) Sea V un espacio vectorial y sean W_1, W_2 subespacios de V. Explicar lo que significa la afirmación que V es la suma directa de W_1

y W_2 . Probar que, si V es de dimensión finita, entonces V es la suma directa de subespacios W_1 y W_2 si y solo si la unión de una base de W_1 y una base de W_2 es una base de V.
SOLUCION. $V = W_1 \oplus W_2$ si:

(a) $V = W_1 + W_2$, es decir, cada vector de V es la suma de un vector en W_1 y un vector en W_2.

(b) $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$.

Suponga que $B_1 = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$ es una base de W_1 y $B_2 = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s\}$ es una base de W_2.

Sea $V = W_1 \oplus W_2$. Tocar probar que $B_1 \cup B_2$ es una base de V, es decir, que $V = span(B_1 \cup B_2)$ y que los vectores de $B_1 \cup B_2$ son LI.
Si $\vec{v} \in V$, entonces, por (a) de la definición de suma directa, existe $\vec{w}_1 \in W_1$ y $\vec{w}_2 \in W_2$ tal que $\vec{v} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$. Pero $\vec{w}_i \in span(B_i)$, $i = 1, 2$ y por consiguiente $\vec{v} \in span(B_1 \cup B_2)$. Asi $V = span(B_1 \cup B_2)$. Sea ahora $\sum_{i=1}^{r} a_i \vec{u}_i + \sum_{j=1}^{s} b_j \vec{v}_j = \vec{0}$, siendo los a_i, b_j escalares. Entonces $\sum_{i=1}^{r} a_i \vec{u}_i = -\sum_{j=1}^{s} b_j \vec{v}_j$. El lado derecho de esta ecuación es un vector de W_2 mientras que el lado izquierdo es un vector de W_1, asi por (b), ambos lados son $\vec{0}$. Sigue, puesto que los vectores $\vec{u}_i$ son LI, siendo una base de W_1, que $a_1 = a_2 = \dots a_r = 0$ y semejante $b_1 = b_2 = \dots b_2 = 0$. Asi, los vectores de $B_1 \cup B_2$ son LI.
Suponga ahora que $B_1 \cup B_2$ es una base de V. Si $\vec{v} \in V$, pues, existen escalares $a_1, \dots a_r, b_1 \dots b_s$ tales que $\vec{v} = \sum_{i=1}^{r} a_i \vec{u}_i + \sum_{j=1}^{s} b_j \vec{v}_j$. Asi $\vec{v} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ con $\vec{w}_1 = \sum_{i=1}^{r} a_i \vec{u}_i$ y $\vec{w}_2 = \sum_{j=1}^{s} b_j \vec{v}_j$. Asi, se cumple (a) de la definición de suma directa. Suponga que $\vec{w} \in W_1 \cap W_2$. Entonces hay escalares $a_1, \dots a_r, b_1 \dots b_s$ tales que $\vec{w} = \sum_{i=1}^{r} a_i \vec{u}_i$ y $\vec{w} = \sum_{j=1}^{s} b_j \vec{v}_j$. Restando, $\sum_{i=1}^{r} a_i \vec{u}_i - \sum_{j=1}^{s} b_j \vec{v}_j = \vec{0}$. Pero $B_1 \cup B_2$ es por hipótesis una base de V, luego sus vectores son LI, y luego $a_i = b_j = 0, i = 1 \dots r, j = 1 \dots s$. Luego $\vec{w} = \vec{0}$, y, ya que $\vec{w}$ era un vector arbitrario de $W_1 \cap W_2$, se tiene $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ y se cumple (b) de la definición de suma directa.

4. (10 ptos). Hallar una base ortogonal de $\mathbf{R}^2$ con el producto interno

$$< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >= x_1 x_2 + (1/2)(x_1 y_2 + x_2 y_1) + y_1 y_2$$

Sea $W = span\{\vec{v}\}$ donde $\vec{v}$ es el primer elemento de su base; hallar la matriz, con respeto a la base standard de $\mathbf{R}^2$, de la projección ortogonal $Proj_W$.
SOLUCION. Aplicar Gram-Schmidt a la base standard $\{\vec{v}_1 = (1, 0), \vec{v}_2 =$

$(0,1)\}$ de $\mathbf{R}^2$:

$$\vec{w_1} = \vec{v_1}$$

$$\vec{w_2} = \vec{v_2} - \frac{< \vec{v_2}, \vec{w_1} >}{< \vec{v_1}, \vec{v_1} >}\vec{v_1}$$

$$< \vec{v_2}, \vec{w_1} > =< (0,1),(1,0) >= 0.1 + \frac{1}{2}(0.0 + 1.1) + 1.0 = \frac{1}{2}$$

$$< \vec{v_1}, \vec{v_1} > =< (1,0),(1,0) >= 1 + \frac{1}{2}(0+0) + 0 = 1$$

$$\text{Luego } \vec{w_2} = (0,1) - \frac{1}{2}(1,0) = (-\frac{1}{2},1)$$

Asi, tenemos la base ortogonal $\{(1,0),(-\frac{1}{2},1)\}$.

$Proj_W : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ se define por:
Si $\vec{u} \in \mathbf{R}^2$, se escribe $\vec{u} = \vec{w} + \vec{w}^{\perp}$, donde $\vec{w} \in W$, $\vec{w}^{\perp} \in W^{\perp}$. Entonces $Proj_W(\vec{u}) = \vec{w}$. La matriz de $Proj_W$, con respeto a la base standard, es la matriz cuyas columnas son $proj_W((1,0))$, $Proj_W((0,1))$. Claro, con nuestra base, $W = span\{(1,0)\}$ y $W^{\perp} = span\{(-\frac{1}{2},1)\}$. Asi $proj_W((1,0)) = (1,0)$. Ahora, $(0,1) = \frac{1}{2}(1,0) + (-\frac{1}{2},1)$, asi que $Proj_W((0,1)) = \frac{1}{2}(1,0)$. Por consiguiente, la matriz buscada es

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$